1. ماتریس را در صورت وجود بیابید و تمامی مراحل را قدم به قدم ذکر کنید و اگر وجود ندارد علت آن را ذکر کنید.

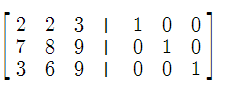
الف)

ب)

**پاسخ:**

برای حل این سوال باید ببینیم که آیا ماتریسی که از چپ ضرب می‌شود (آن را می نامیم) معکوس‌پذیر هست یا نه. اگر بود کافیست معکوسش را محاسبه کنیم و از سمت چپ در ماتریسی که آن طرف مساوی می‌باشد ضرب کنیم .

الف) با بررسی ستون‌های ماتریس متوجه می‌شویم که آن‌ها مستقل خطی هستند. پس ماتریس معکوس را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



و پس از انجام عملیات‌های سطری (ضرب ها) به حاصل :

می‌رسیم و حال کافیست حاصل ضرب زیر را بیابیم:

ب) از آنجایی که ماتریس یک ستون تمام صفر دارد، پس معکوس‌پذیر نیست و جوابی برای پیدا نمی‌کنیم.

2. تجزیه ماتریس را بدست آورده و سپس معادله‌ی را حل کنید.

**پاسخ:**

3. فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

الف) یک پایه برای range این ماتریس پیدا کنید که شامل ستون های A باشد.

ب) برای ماتریس A مقادیر Rank و Nullity را حساب کنید.

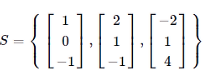
**پاسخ:**

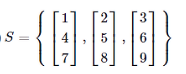
الف) می‌دانیم که Range ماتریس همان فضای ستونی آن می‌باشد. بنابراین Range(A) = Span{A1, A2, A3, A4} که Ai بردار ستونی iام در ماتریس A است. ماتریس A را با عملیات ردیفی به ماتریس زیر تبدیل می‌کنیم و با استفاده از قاعده ۱ های سرگروه (leading) می‌توان ستون های ۱و ۳ که شامل این ۱ ها هستند پایه های فضای ستونی A می‌باشند. {A1, A3}



ب) با توجه به بخش قبل می‌دانیم A1 و A3 پایه‌ی Range(A) می‌باشند. بنابر این dimension برای Range این ماتریس ۲ می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت Rank ماتریس که همان dimension برای Range ماتریس است برابر با ۲ است. و طبق قضیه rank-nullity داریم: Rank A + Nullity A = 4 بنابراین Nullity ماتریس A برابر با ۲ است.

4. تعیین کنید که هریک از موارد زیر می‌توانند پایه ای برای باشند یا خیر.

الف)



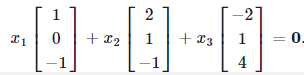
ب)

**پاسخ:**

طبق تعریف می‌دانیم یک زیرمجموعه S از یک فضای برداری V را پایه گویند اگر :

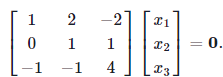
۱. S مستقل خطی باشد

۲. S یک spanning set باشد

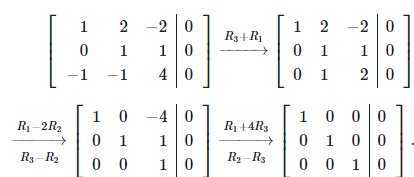


الف) ترکیب مقابل را در نظر می‌گیریم:

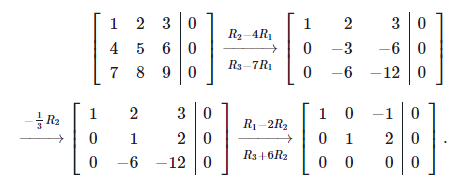
می‌توان آن را به صورت یک معادله ماتریسی بازنویسی کرد:



برای حل کردن آن نیاز است تا ماتریس افزونه را تشکیل داده و عملیات ردیفی را روی آن اعمال نماییم:



می‌توان فهمید که پاسخ به صورت x1 = x2 = x3 = 0 میباشد. پس قابل نتیجه‌گیری است که S مستقل خطی است و از آنجایی که S شامل ۳ بردار مستقل خطی در است می‌توان گفت که یک پایه برای می‌باشد.

ب) مشابه بخش قبل معادله ماتریسی را ایجاد کرده و ماتریس افزونه را تشکیل می‌دهیم. با اعمال عملیات ردیفی داریم:

که بیان می‌کند پاسخ به صورت x1 = x3, x2 = -2x3 است که دراینجا x3 یک متغیر آزاد است. بنابراین هیچ پاسخ غیر صفری وجود نداشته و S وابسته خطی است و نمی‌تواند یک پایه برای باشد.